4

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

4.1 CONVERSIÓN GRADOS-RADIANES

Las funciones DERIVE SIN(x) y COS(x) precisan que *x* se proporcione en radianes. Sin embargo, podemos incluir grados con las siguientes expresiones:

SIN (x deg) **SIN(30º)** **SIN(xπ/180)** (No olvides los paréntesis).

DERIVE interpreta los ángulos en radianes salvo que se incluya el símbolo **º** o se añada el sufijo **deg**. Introduce y simplifica las expresiones **pi-30º** y **180º-pi/6**. Observa que en ambos casos aparece el mismo resultado (en radianes).

El símbolo **º** se encuentra en la parte superior de la ventana de introducción de expresiones que se abre al pulsar .

Practica

1. Halla el seno de 30º con las siguientes expresiones:

   SIN(π/6) **SIN(30deg)** **SIN(30π/180)**

2. Introduce, simplifica y aproxima las siguientes expresiones:

   30º **30deg** **pi** **pi°** **pideg**

   Los últimos valores obtenidos, ¿son grados o radianes?

Si en una expresión se mezclan grados y radianes, DERIVE lo pasa todo a radianes.

Prueba a simplificar **60º-pi/6** y **pi –60º**.

3. Define las siguientes funciones para convertir grados en radianes y viceversa:

   GR(x):=πx/180 **RG(x):=180x/π**

   Utilízalas para pasar a radianes 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º y 270º, y para pasar a grados π/4, 3π/4, 5π/6, π/2 y 4π/3 radianes.

4.2 TEOREMAS DE LOS SENOS Y DEL COSENO

Un triángulo tiene seis elementos: tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo es hallar los que falten a partir de los otros tres. Entre los datos debe figurar, al menos, un lado.

Para ello, utilizamos tres propiedades que dan lugar a tres ecuaciones:

Teorema del seno:	$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A$
Teorema del coseno:	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
Suma de los tres ángulos:	$A + B + C = 180$

Para aplicarlo vamos a definir unas herramientas que nos permitan hallar un dato en función de otros tres datos. Utilizamos **la**, **lb**, **lc** para los lados y **a**, **b**, **c** para los ángulos, porque DERIVE puede no distinguir mayúsculas de minúsculas.

- Para hallar el lado **la** conocidos los lados **lb** y **lc** , y el ángulo **a**:

  TC(a,lb,lc):=√(lb^2+lc^2-2 lb lc COS(a))

- Para hallar el ángulo a conocidos los lados **la**, **lb** y **lc**:

  TC2R(la,lb,lc):= ACOS((la^2-lb^2-lc^2)/(-2lb lc))

  Si queremos obtener los ángulos en grados en vez de radianes añadiríamos ***180/π** a la definición de TC2R que quedaría así:

  TC2(la,lb,lc):=ACOS((la^2-lb^2-lc^2)/(-2lb lc))*180/pi

- Para hallar el lado la conocidos los ángulos **a** y **b** y el lado **lb**:

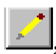
  TS(a,b,lb):=lb*SIN(a)/SIN(b)

- Para hallar el ángulo b conocidos el ángulo **a** y los lados **la** y **lb**:

  TS2R(a,la,lb):=ASIN(lb SIN(a)/la)

  Si queremos obtener los ángulos en grados en vez de radianes añadiríamos ***180/π** a la definición de TS2R que quedaría así:

  TS2(a,la,lb):=ASIN(lb SIN(a)/la)*180/pi

Para introducir las expresiones anteriores, pulsa el icono , escribe cada expresión y pulsa **Sí** para confirmar.

Se utiliza **:=** en vez de **=** porque se trata de una asignación o definición, en vez de una ecuación.

Practica:

4. Introduce la expresión **TS(30º,60º,1)** para obtener un cateto **la** (el opuesto al ángulo de 30º) de un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1. Si introduces 30 en vez de 30º, se interpretan 30 radianes. El símbolo **º** puedes encontrarlo en la parte superior de la ventana de introducción de expresiones que se abre al pulsar . También puedes utilizar **deg** e introducir **TS(30deg , 60deg , 1)**.

   Si simplificas **TS(60º,30º,1)** obtendrás el otro cateto **lb** (opuesto al ángulo de 60º).

5. Repite la práctica introduciendo las siguientes expresiones y simplificando. Si pulsas , obtendrás las aproximaciones decimales:

   TC(45º, 3, 3) **TC2(3,4,5)** **TS(60º,60º,5)**

   TS2(45º,3,3) **TC(π/4 , 3 ,3)** **TC2(2,3,7)**

   Interpreta los resultados que se obtienen. Si introduces 45 en vez de 45º, DERIVE interpreta 45 radianes. Para introducir π escribe **pi** o búscalo en la lista superior de la ventana de introducción de datos.

   El extraño resultado del último ejemplo no debes tenerlo en cuenta porque se trata de un triángulo imposible. Piensa por qué.

Para hallar el ángulo **c** conocidos los ángulos **a** y **b**, basta considerar **pi-a-b** (en radianes) o bien **180º-a-b** (en grados). No es preciso definir ninguna herramienta.

4.3 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Un triángulo tiene seis elementos: tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo es hallar los que falten a partir de los otros tres. Entre los datos debe figurar, al menos, un lado. Según los datos podemos encontrarnos cinco casos:

- Caso 1: Tres lados, **la**, **lb**, **lc**.
- Caso 2: Dos ángulos **aa**, **ab** y el lado **lc** que los une.
- Caso 3: Dos ángulos, **aa** y **ab**, y el lado, **la**, opuesto a uno de ellos.
- Caso 4: Dos lados, **la** y **lb**, y el ángulo que forman, **ac**.
- Caso 5: Dos lados, **la** y **lb**, y el ángulo opuesto a uno de ellos, **aa**.

Lo importante no son los nombres asignados a los lados y ángulos, sino si se trata del lado opuesto a un ángulo, ángulo formado por dos lados, etc. Tenlo en cuenta si tienes que reasignar nombres a los datos de cada problema.

Observa que en los casos 2 y 3 el tercer ángulo puede obtenerse sumando los otros dos y restando su suma a π (o a 180º) por lo que ambos casos se reducen a uno.

Debes prever e interpretar los casos en los que no hay solución o esta es doble.

Caso 1: Tres lados, la, lb, lc

Para hallar el ángulo **a** utilizamos TC2(la,lb,lc). Para el ángulo **b** basta situar como primer argumento el lado **lb** opuesto. Por tanto, utilizamos TC2(lb,la,lc). Para el tercer lado **lc** utilizamos TC2(lc,la,lb).

Podemos reunir en una sola herramienta la resolución del triángulo en este caso 1:

SOLUC1(la,lb,lc):=[“A=”,TC2(la,lb,lc),”B=”,TC2(lb,la,lc),”C=”,TC2(lc,la,lb)]

Se utilizan corchetes, porque se trata de una lista de elementos.

Practica

6. Resuelve el triángulo de lados 3, 4 y 5.

   Para ello, introduce **SOLUC1(3,4,5)** y pulsa **Simplificar,** [=] , o **Aproximar**, [≈]. Obtendrás el valor de los ángulos *A*, B y C.

   Con SOLUC1(4,3,5) obtendrás los mismos ángulos en otro orden.

7. Resuelve los siguientes triángulos:

la = 3	**lb = 2**	**lc = 4**
la = 5	**lb = 5**	**lc = 7** (isósceles)
la = 3	**lb = 2**	**lc = 5** (interprétalo)
la = 4	**lb = 3**	**lc = 2** (¿es el mismo de antes?)
la = 2.34	**lb = 3.27**	**lc = 4.52**
la = 345	**lb = 254**	**lc = 476**
la = 3	**lb = 3**	**lc = 3** (equilátero)
la = 1	**lb = 2**	**lc = 7** (imposible)
la = 0.12	**lb = 0.23**	**lc = 0.19**

Condición de existencia de soluciones:

Un aspecto interesante antes de resolver un triángulo es prever si existe solución, si no existe o si existe más de una. En este caso (tres lados) la condición necesaria es que ninguno de los lados sea mayor que la suma de los otros dos. Si es así, la solución es única. En efecto: de los dos ángulos que tienen el mismo coseno, uno es mayor de 180º y no puede formar parte de un triángulo.

La siguiente herramienta, NSOL1, será cierta (true) si el triángulo tiene solución y falsa (false) si no es así:

NSOL1(la,lb,lc):= la < lb + lc AND lb < la + lc AND lc < la + lb

Podemos completar la herramienta de resolución para este caso 1 (conocidos los tres lados) de la siguiente forma:

CASO1(la,lb,lc):=IF(NSOL1(la,lb,lc), SOLUC1(la,lb,lc), ”No hay solución “)

La función IF de DERIVE aplicará SOLUC1 solo en el caso de que exista solución (si el valor de NSOL1 es true); en caso contrario, mostrará el mensaje ”No hay solución”.

8. Vuelve a resolver los triángulos de la práctica 4 con la herramienta CASO1.

Caso 2: Dos ángulos a, b y el lado lc que los une.

En este caso con datos **a**, *b* y **lc** podemos hallar el ángulo **c** que falta con la expresión **π-a-b**, o **180-a-b** si **a** y **b** se introducen en grados.

Para hallar el lado **la** podemos aplicar el teorema del seno con TS de la siguiente forma:

TS(a, pi-a-b , lc)

Observa que en la definición de TS el segundo y tercer argumentos eran un ángulo y su lado opuesto. De igual forma, podemos obtener el lado **lb** con **TS(b, pi-a-b , lc)**.

Introduce la siguiente expresión para hallar las tres incógnitas (ángulo C y lados a y b) de este caso 2:

SOLUC2(a,b,lc):=[“C=”,(pi-a-b)*180/pi,”a=”,TS(a,pi-a-b,lc),”b=”,TS(b,pi-a-b,lc)]

En este caso, siempre hay solución salvo que $A + B > 180º$. Para contemplarlo introduce la siguiente herramienta:

CASO2(a,b,lc):=IF(a+b<pi , SOLUC2(a,b,lc) , “No hay solución”)

Practica:

9. Para resolver el triángulo del que se conoce $A = 30º$, $B = 60º$ y $c = 5$ introduce y simplifica la expresión **CASO2(30º, 60º, 5)**.

   Repítelo con **CASO2(60º, 30º,5)**. Obtendrás los mismos resultados en otro orden. Recuerda que lo importante no es el nombre de los datos, sino qué lado es opuesto a cada ángulo.

10. Resuelve los siguientes triángulos:

a = 30º	**b = 20º**	**lc = 4**
a = 50º	**b = 50º**	**lc = 7** (isósceles)

a = 93º **b = 92º** **lc = 5** (interprétalo)

a = 20º **b = 30º** **lc = 2** (¿es el mismo de antes?)

a = 2.34 **b = 3.27** **lc = 4.52**
(**a** y **b** están en radianes, pero **c** se obtiene en grados)

a = 34.5º **b = 25.4º** **lc = 476**

a = 60ºb = 60º **lc = 3** (equilátero)

Caso 3: Dos ángulos, a y b, y el lado, la, opuesto a uno de ellos.

Este caso es análogo al caso anterior, pero en vez del ángulo **a** debemos tomar el ángulo **c** (es decir, **pi-a-b**). En consecuencia, podemos definir:

SOLUC3(a,b,la):=[“C=”,(pi-a-b)*180/pi,”b=”,TS(b,a,la),“c=”,TS(pi-a-b,a,la)]

Prueba la herramienta anterior simplificando SOLUC3(30º, 60º, 5). Observa que 5 es el lado opuesto al ángulo de 30º. Si escribes 30 en lugar de 30º, se interpretarán 30 radianes.

Como en el caso 2, siempre hay solución, salvo que $A + B > 180º$. Para contemplarlo, introduce la siguiente herramienta :

CASO3(a,b,la):=IF(a+b<pi , SOLUC3(a,b,la) , “No hay solución”)

Observa que el tercer argumento **la** es el lado opuesto al primer argumento (ángulo *A*). Lo importante es el lugar que ocupan los argumentos, no su denominación.

Practica:

11. Resuelve los siguientes triángulos:

a = 30º **b = 20º** **la = 4**

a = 50º **b = 50º** **la = 7** (isósceles)

a = 93º **b = 92º** **la = 5** (interprétalo)

a = 20º **b = 30º** **la = 2** (¿es el mismo de antes?)

a = 34.5º **b = 25.4º** **la = 476**

<u>Caso 4: Dos lados, la y lb, y el ángulo que forman, c.</u>

Podemos obtener el tercer lado **lc** aplicando el teorema del coseno con TC(c,la,lb). El ángulo **a** podemos obtenerlo mediante el teorema del seno con TS2(c,lc,la) o mediante el teorema del coseno con TC2(la,lb,lc). Pero en ambos casos necesitamos hallar **lc**, que no es uno de los datos en este caso.

El tercer ángulo **b** podemos obtenerlo de igual forma con TS2(c,lc,lb) o con TC2(lb,la,lc).

Por tanto, introduce la siguiente expresión para este caso:

CASO4(la,lb,c):=[“c=”,TC(c,la,lb),”A=”,TC2(la,lb,TC(c,la,lb)),”B=”,TC2(lb,la,TC(c,la,lb))]

Observa que el tercer argumento **lc** de TC2 se obtiene aplicando TC.

En este caso 4 (dos lados y el ángulo que forman) siempre existe solución y es única, salvo los casos improcedentes de lados negativos o ángulo mayor de 180º.

Practica:

12. Halla **lc** conociendo **la=3**, **lb=5** y **ac=30º** . Para ello, introduce y simplifica, o aproxima, **TC(30º,3,5)**. Resuelve el triángulo completo con **CASO4(30º,3,5)**.

13. Halla el lado que falta en los siguientes triángulos:

la = 3	**lb = 2**	**C=45º**
la = 5	**lb = 5**	**C=37º** (isósceles)
la = 3	**lb = 2**	**C=190º** (interprétalo)
la = 4	**lb = 3**	**C=90º** (rectángulo)
la = 2.34	**lb = 3.27**	**C=43.52º**
la = 345	**lb = 254**	**C=476**
la = 3	**lb = 3**	**C=60º** (equilátero)
la = 1	**lb = 2**	**C=120º**
la = 0.12	**lb = 0.23**	**C=0.19** (*C* en radianes)

14. Sea $a = 3$ y $b = 5$. Propón un valor del ángulo C para que el lado c sea el lado mayor, otro para que sea el lado menor y otro para que sea el lado intermedio. Comprueba cada caso.

Ten en cuenta que hay dos ángulos (menores de 180º) con el mismo seno, y con la expresión TS solo obtienes uno de ellos. El otro será la diferencia hasta π radianes o

180º. Para determinar cuál es el apropiado, considera que frente al mayor lado debe aparecer el mayor ángulo. Si es posible conviene utilizar el teorema del coseno porque de los dos ángulos con el mismo coseno solo uno es menor de 180º.

Caso 5: Dos lados, la y lb, y el ángulo opuesto a uno de ellos, a.

Es el caso más complejo porque puede tener una solución, dos soluciones o ninguna solución.

Para los datos **la**, **lb** y **a**, podemos obtener el ángulo **b** aplicando el teorema del seno con TS2(a,la,lb). Pero hay que tener en cuenta que DERIVE solo muestra uno de los dos ángulos que tienen un seno dado. El tercer ángulo **c** se obtiene restando a 180º los otros dos con **pi-a-TS2(a,la,lb)**.

En cuanto al tercer lado lc, puede obtenerse mediante el teorema del seno con TS(c,a,la) o mediante el teorema del coseno con TC(c,la,lb) pero como **c** no es un dato en este caso 5, habría que sustituirlo por la expresión anterior.

Introduce las siguientes herramientas:

ANGC(a,la,lb):=pi-a-TS2R(a,la,lb)

LADOC(a,la,lb):=TC(pi-a-TS2R(a,la,lb),la,lb)

Observa que es necesario usar TS2R porque un ángulo de 30 obtenido con TS2 se interpretaría como 30 radianes por DERIVE. Pruébalas con ANGC(45º, 3, 3) y LADOC(45º,3,3)

Introduce la siguiente expresión para resolver globalmente este caso:

SOLUC5(a,la,lb):=[“c=”,LADOC(a,la,lb) ,“B=”, TS2(a,la,lb)*180/pi ,“C=”,ANGC(a,la,lb)*180/pi]

Pruébala con SOLUC5(30º,4,6). Comprueba si a mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto.

Al utilizar TS2 para hallar el ángulo **b** solo obtenemos uno de los dos ángulos posibles. El otro (si también es válido) es **pi-b**. Para considerarlo habrá que sustituir TS2(a,la,lb) por pi-TS2(a,la,lb) en las expresiones anteriores.

Introduce estas expresiones para considerar una segunda solución del triángulo:

ANGC2(a,la,lb):=TS2R(a,la,lb)-a

LADOC2(a,la,lb):=TS(TS2R(a,la,lb)-a , a , la)

Introduce la siguiente expresión (en una sola línea) para considerar esta otra posibilidad:

SOLUC52(a,la,lb):= [“c=”,LADOC2(a,la,lb) ,
“B=”, (pi-TS2R(a,la,lb))*180/pi ,
“C=”, ANGC2(a,la,lb)*180/pi]

Pruébala con SOLUC52(30º,4,6). Comprueba de nuevo si a mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto.

¿Cuándo habrá que considerar una o dos soluciones? Debes comparar **la**, **lb** y **lb sin(a)**.

Introduce la siguiente expresión para determinar el número de soluciones.

NSOL5(a,la,lb):=IF(lb*SIN(a)>la,"NO HAY SOLUCIÓN",IF(la<lb,"DOS SOLUCIONES","SOLUCIÓN ÚNICA"))

15. Prueba la herramienta anterior simplificando las siguientes expresiones:

    NSOL5(30º,4,6) **NSOL5(30º,3,6)**

    NSOL5(30º,2,6) **NSOL5(30º,7,6)**

    Introduce la siguiente expresión (en una sola línea) para considerar globalmente este caso:

    CASO5(a,la,lb):= IF(lb*SIN(a)>la,"NO HAY SOLUCIÓN",
    IF(la<lb,[SOLUC5(a,la,lb),SOLUC52(a,la,lb)],
    SOLUC5(a,la,lb)))

16. Prueba la herramienta anterior simplificando las siguientes expresiones e interpretando los resultados:

    CASO5(30º,4,6) **CASO5(30º,3,6)**

    CASO5(30º,2,6) **CASO5(30º,7,6)**

Observa el segundo de los triángulos. Se trata de un triángulo rectángulo. Aunque se muestra con dos soluciones en realidad es una sola repetida.

17. Propón y comprueba ejemplos de triángulos con una y dos soluciones y también sin solución. Pero debes preverlo antes de comprobarlo.

18. Con las herramientas construidas resuelve los ejercicios del libro resueltos y propuestos en las páginas 1113 y 115, teniendo en cuenta que deberás reasignar el nombre de los vértices y lados para que se adapten a los utilizados en la definición de las herramientas. Prevé antes de resolverlos la existencia y número de soluciones.

19. Comprueba el ejercicio 6 de la página 118 del libro. Utiliza las herramientas TC y TS para resolver cada uno de los triángulo.

20. Comprueba los ejercicios 7, 8, 9 y 10 de las páginas 118 y 119 del libro.

21. Resuelve los triángulos del ejercicio 8 propuesto en la página 120 del libro.

22. Utiliza DERIVE para resolver los ejercicios de las páginas 121 y 122 del libro. Lee detenidamente los enunciados, plantea los triángulos correspondientes y asigna nombres a cada ángulo y lado. La resolución mecánica de cada triángulo puedes hacerla automáticamente con las herramientas generadas.

4.1 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CON HOJA DE CÁLCULO

También puedes utilizar una hoja de cálculo para elaborar un modelo de resolución de triángulos para cada uno de los cinco casos.

Considera el primer caso: de un triángulo conocemos sus tres lados y buscamos los tres ángulos.

Construye la siguiente hoja de cálculo:

	A	B	C
1		Tres lados	
2		A b c	
3	a	5	
4	b	4	
5	c	3	
6	A		
7	B		
8	C		
9		=SI(O(B3>(B4+B5);B4>(B3+B5);B5>(B3+B4));"NO HAY SOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	
10	a	=B3	
11	b	=B4	
12	c	=B5	
13	A	=GRADOS(ACOS((B3*B3-B4*B4-B5^2)/(-2*B4*B5)))	
14	B	=GRADOS(ACOS((B4*B4-B5*B5-B3*B3)/(-2*B5*B3)))	
15	C	=180-B13-B14	

Los datos debes introducirlos exclusivamente en las celdas B3, B4 y B5. Para el resto de los casos construye herramientas similares. Ten en cuenta que en el caso de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, debes prever la existencia de dos soluciones.

A continuación se muestra una propuesta de hoja completa. Ten en cuenta que los datos deben introducirse solo en las celdas correspondientes (todos en las filas 3 a 8). Es recomendable "proteger" o bloquear el resto para no reemplazar las fórmulas con valores.

	A	B	C	D	E	F	G
1		tres lados	dos ángulos y el lado que los une	dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos	dos lados y el ángulo que forman	dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	
2		a b c	A B c	A B a	a b C		a b A
3	a	5		5	5		5
4	b	4			4		4
5	c	3	3				
6	A		90	90			90
7	B		53,13	53,13			
8	C				36,87		
9		=SI(O(B3>(B4+B5);B4>(B3+B5);B5>(B3+B4));"NO HAY SOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	=SI(C6+C7>180;"NO HAY SOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	=SI(D6+D7>180;"NO HAY SOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	SOLUCIÓN ÚNICA	=SI(G4*SENO(RADIANES(G6))>G3;"NO HAY SOLUCIÓN";SI(G3<G4;"DOS SOLUCIONES";"SOLUCIÓN ÚNICA"))	
10	a	=B3	=C5*SENO(RADIANES(C6))/SENO(RADIANES(C15))	=D3	=E3	=G3	=G3
11	b	=B4	=C5*SENO(RADIANES(C7))/SENO(RADIANES(C15))	=SENO(RADIANES(D7))*D3/SENO(RADIANES(D6))	=E4	=G4	=G4
12	c	=B5	=C5	=SENO(RADIANES(D15))*D3/SENO(RADIANES(D6))	=RAIZ(E3*E3+E4*E4-2*E3*E4*COS(RADIANES(E8)))	=G3*SENO(RADIANES(F15))/SENO(RADIANES(G6))	=G3*SENO(RADIANES(G15))/SENO(RADIANES(G6))
13	A	=GRADOS(ACOS((B3*B3-B4*B4-B5^2)/(-2*B4*B5)))	=C6	=D6	=GRADOS(ASENO(E3*SENO(RADIANES(E8))/E12))	=G6	=G6
14	B	=GRADOS(ACOS((B4*B4-B5*B5-B3*B3)/(-2*B5*B3)))	=C7	=D7	=180-E13-E15	=GRADOS(ASENO(SENO(RADIANES(G6))*G4/G3))	=SI(G13<F14;180-F14;" no vale")
15	C	=180-B13-B14	=180-C13-C14	=180-D13-D14	=E8	=180-F13-F14	=180-G13-G14