



## 3

## ÁLGEBRA



## 3.1 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Pulsa  e introduce la expresión  $(3x^3-14x^2+4x+3)/(3x+1)$ . Confirma pulsando **Sí**. Mientras el cociente de polinomios permanece resaltado en pantalla, pulsa  para simplificar. Verás que se realiza la división. Compara el cociente con el que aparece en la página 68 del libro.

Repite la práctica anterior con la fracción algebraica  $(3x^3-13x^2+8x+19)/(3x+2)$ . Ahora no consigues el cociente porque la división no es exacta (los polinomios no son divisibles). Sin embargo, puedes abrir el menú **Simplificar** de la barra de herramientas y elegir la opción **Expandir** (confirma con el botón **Expandir** de la parte inferior). Obtendrás  $x^2-5x+6$  como cociente y **7** como resto. Recuerda que:

$$\text{Dividendo} / \text{divisor} = \text{Cociente} + \text{Resto} / \text{divisor}$$

Repite el ejercicio con otros polinomios.

Pulsa  e introduce la expresión  $x^3-9x^2+26x-24$ . Confirma pulsando **Sí** y, a continuación (con el polinomio resaltado), abre el menú **Simplificar** y elige la opción **Factorizar**. Finaliza pulsando en el botón **Factorizar** (o pulsa **Sí** y luego *simplificar* con el icono  de la barra de herramientas). También puedes hacerlo directamente pulsando **CTRL+F** mientras aparece resaltado el polinomio. Acabas de factorizar el polinomio.

## Practica

1. Factoriza los siguientes polinomios:

$$3x^2+3x-36$$

$$3x^4+3x^3-33x^2+3x-36$$

$$x^6-15x^4-42x^3-40x^2$$

$$x^6-9x^5+24x^4-20x^3$$

$$x^6-3x^5-3x^4-5x^3+2x^2+8x$$

$$x^4+4x^3+8x^2+7x+4$$

$$6x^4+7x^3+6x^2-1$$

$$6x^2+x-1$$

Compara los resultados con los de los ejercicios resueltos y propuestos en la página 69 del libro y con el ejercicio 4 de la página 85.

2. Factoriza la expresión  $x^2-(a+b)x+ab$ . Interpreta el resultado recordando la relación entre la suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado y el coeficiente de  $x$  y el término independiente, respectivamente.

Introduce la expresión  $(x-3)(x+1)(x-1)(x-5)$ . A continuación, abre el menú **Simplificar** y elige la opción **Expandir**. Obtendrás un polinomio de cuarto grado. Factorízalo. Deberías obtener los factores iniciales.

Repite la práctica con otros factores de la forma  $(x - a)$ .

3. Siguiendo el modelo anterior, halla polinomios que presenten las siguientes raíces:

- a)  $x = 1, x = 5$  y  $x = 3$     b)  $x = -1$  y  $x = 2$     c)  $x = 2, x = 7$  y  $x = 0$   
 d)  $x = 1$  y  $x = 3/2$     e)  $x = \sqrt{2}$  y  $x = 0$     f)  $x = -2, x = 4, x = -3$  y  $x = 5$

Introduce el polinomio  $x^2-4$  y factorízalo. Observa que sus raíces son racionales (en realidad enteras).

Introduce el polinomio  $x^2-3$  y factorízalo. Al abrir la ventana correspondiente a **Simplificar/Factorizar** marca en la parte derecha, **Forma**, la opción **Racionales**. Comprueba que no obtienes lo deseado porque las raíces no son racionales. Repite la operación pero ahora marca la opción **Radicales** y comprueba el resultado.

4. Factoriza los siguientes polinomios:

$x^2-3x-4$	$3x^2-5x+7$	$x^3-2x^2+x$
$x^3-3x^2+2x$	$x^4-8x^3+18x^2-11x$	$x^3-7x^2+3x$
$x^3-2x^2+x-2$	$x^3-2x^2-9x+18$	


5. Resuelve los ejercicios 7, 8 y 9 de las páginas 88 y 89 del libro. Para el ejercicio 8 deberás factorizar previamente cada polinomio.

## 3.2 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Introduce la expresión  $(3x^3-2x^2+5x)/(x^2-3x)$  y confirma con **Sí**. Verás en pantalla una fracción algebraica. Si simplificas con  $\frac{\square}{\square}$ , obtendrás la fracción irreducible resultante. Observa que se ha dividido numerador y denominador por  $x$ .

### Practica


6. Comprueba, simplificando, que las fracciones  $(x-2)/(x^2+x-6)$  y  $x/(x^2+3x)$  son ambas equivalentes a  $1/(x+3)$ .
7. Comprueba el ejercicio 5 de la página 85 del libro.

8. Introduce la expresión  $4/(x-4)+5/(x+4)+3/(x^2-16)$  y confirma con **Sí**. Verás en pantalla una suma de fracciones algebraicas. Si simplificas con , obtendrás la fracción resultante. Observa que el denominador es el mínimo común denominador de las fracciones iniciales (y aparece factorizado).

9. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

$$(x+7)/x+(x-2)/(x^2+x) -(2x-1)/(x+1) \qquad 1/(x^2-1)+2x/(x+1)-x/(x-1)$$


$$(3x+1)/(x-1) x/(x+1) \qquad (2x/(x+1))/((x-1)/x^2)$$


Compara lo introducido con los ejemplos de las páginas 71 y 72 del libro. Tras introducir cada expresión, confirma con **Sí** para observar en pantalla que no nos hemos equivocado. A continuación, efectúa la operación pulsando .


10. Comprueba con DERIVE los ejercicios resueltos en la página 72 del libro y resuelve los propuestos.

11. Si introduces en DERIVE una fracción algebraica y *simplificas*, verás que, efectivamente, se obtiene la fracción simplificada. Compruébalo con los ejercicios 10, 11 y 12 de la página 89 del libro.

### 3.3 RESOLUCIÓN AUTOMÁTICA DE ECUACIONES

Introduce la ecuación  $x^2-5x+6=0$ . Para ello, pulsa el icono , escribe la ecuación y pulsa **Sí** para confirmar.

A continuación, mientras la ecuación anterior permanece resaltada, pulsa el icono  y aparecerá una ventana donde se indica la variable que queremos obtener (**x**). Pulsa en **Simplificar** y hallarás su valor.

También puedes pulsar **Sí** y, a continuación, el icono *simplificar*, .

#### Practica

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$3x-6=0$$

$$3x-7=0$$

$$3x/5+2/3=0$$

$$3.456x-7.254=0$$

$$x^2+7x+12=0$$

$$x^2-9=0$$

$$x^2-5x=0$$

$$x^4-13x^2+36=0$$


$$x^2-3=0$$

$$x^2-x+13=0$$

$$x^3-3x^2+2x=0$$

$$x^4-8x^3+18x^2-11x=0$$

13. Resuelve con DERIVE las ecuaciones bicuadradas que aparecen en la página 73 del libro.

14. Resuelve con  la ecuación  $(x-3)(x+1)(x-7)=0$ . ¡Evidente!

15. Resuelve la ecuación  $x^3-9x^2+26x-24=0$ .


Compara el resultado con la factorización realizada al principio de esta unidad.

Introduce la ecuación  $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ . Mientras está resaltada, abre el menú **Simplificar** y elige la opción **Expandir**. Al completar el proceso obtendrás la ecuación equivalente sin paréntesis. Al resolverla puedes comprobar que sus soluciones son  $x = 1$ ,  $x = 2$  y  $x = 3$ .

16. Siguiendo el modelo anterior busca ecuaciones que presenten las siguientes raíces:

- a)  $x = 1$ ,  $x = 5$  y  $x = 3$       b)  $x = -1$  y  $x = 2$       c)  $x = 2$ ,  $x = 7$  y  $x = 0$   
d)  $x = 1$  y  $x = 3/2$       e)  $x = \sqrt{2}$  y  $x = 0$       f)  $x = -2$ ,  $x = 4$ ,  $x = -3$  y  $x = 5$

Compara este ejercicio con el ejercicio 3.

Introduce la ecuación  $x^4-2x^3-16x^2+2x+15=0$  y resuélvela con . A continuación, vuelve a situar el cursor sobre la ecuación, haz *click* para seleccionarla y pulsa **CTRL+F** para factorizarla. Relaciona la factorización con las soluciones halladas.

Factoriza con **CTRL+F** o con la opción de menú **Simplificar/Factorizar** algunas ecuaciones del ejercicio 12. Compara las factorizaciones con las soluciones ya obtenidas.


17. Resuelve las siguientes ecuaciones con coeficientes literales y compara los resultados con las “fórmulas” que conoces. No olvides que la variable a resolver o “despejar” es  $x$ :

$$ax=b \quad ax^2+bx+c=0 \quad ax^4+bx^2+c=0 \quad ax^2-b=0$$

18. Resuelve la ecuación  $ax^3+bx^2+cx+d=0$ . ¡No te asustes! Es una “fórmula” para resolver las ecuaciones de tercer grado.

19. Resuelve la ecuación del ejercicio 6 de la página 85 del libro:

$$(x-1)/(x^2+2x)-2/(x^2-2x)+(-x)/(x^2-4)=0$$

Tras introducir la ecuación y simplificar, observarás que, efectivamente, se ha simplificado como una sola fracción algebraica. A continuación, resuélvela con .

Tras resolverla verás aparecer  $x=\infty$  y  $x=-\infty$  como soluciones. No las tengas en cuenta. Significa que si  $x$  es muy grande, el denominador es muy grande y el cociente se hace casi 0.


20. Resuelve con DERIVE las siguientes ecuaciones:

$$\sqrt{(2x-3)+1} = x \quad \sqrt{(2x-3)+\sqrt{(x+7)}}=4$$


Compara los resultados con los que aparecen en la página 74 del libro.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} -\sqrt{(2x-3)+1}=x & \sqrt{(2x-3)-\sqrt{(x+7)}}=4 & 2+\sqrt{x}=x & 2-\sqrt{x}=x \\ \sqrt{(x^2-5x+4)+1}=x-3 & \sqrt{(x-2)+2+\sqrt{(x+1)}}=3 & \sqrt{3x-\sqrt{2}}=3x-1 & \sqrt{2x-5}=0 \end{array}$$


Introduce la ecuación  $\frac{6}{x}+\frac{(x+1)}{(x-2)}=6$  y resuélvela con . Resuelve también la ecuación  $\frac{(2x-3)}{(x^2-5x)}+\frac{(x+4)}{x}=\frac{3}{4}$ . Compara los resultados con los de la página 75 del libro.

22. Resuelve los ejercicios 1 y 2 propuestos en la página 75 del libro.

23. Introduce la ecuación  $3^{(1-x^2)}=1/27$  y resuélvela con . Compara los resultados con los de la página 76 del libro. Resuelve también las demás ecuaciones que aparecen en la página 76 del libro:

$$5^{(x^2-5x+6)}=1 \quad 3^{(1-x^2)}=2 \quad 2^x+2^{(x+1)}=12$$

24. Resuelve las ecuaciones exponenciales que aparecen en los ejercicios propuestos en la página 77 del libro.

25. Introduce la ecuación  $\text{LOG}(x,10)+\text{LOG}(50,10)=3$  y resuélvela con . Compara el resultados con el que aparece en la página 77 del libro.  $\text{LOG}(x,10)$  significa logaritmo de  $x$  en base 10. Si se introduce  $\text{LOG}(x)$  sin especificar la base, DERIVE interpreta que es el número  $e$  (logaritmo neperiano). Comprueba también las demás ecuaciones logarítmicas que aparecen en la página 77 del libro:

$$\begin{array}{ll} 5 \text{ LOG}(x+3,2)=\text{LOG}(32,2) & 2 \text{ LOG}(x,10)=\text{LOG}(10-3x,10) \\ 2\text{LOG}(x,10)-\text{LOG}(x+6,10)=3 \text{ LOG}(2,10) & 4 \text{ LOG}(x^2+1,2)=\text{LOG}(625,2) \\ 2\text{LOG}(x)-\text{LOG}(x+6)=3 \text{ LOG}(2) & 4 \text{ LOG}(x^2+1)=\text{LOG}(625) \end{array}$$


Las dos últimas ecuaciones se han repetido sin especificar la base (por defecto el número  $e$ ) y el resultado no ha cambiado. Repítelo especificando otra base como  $2\text{LOG}(x,5)$ . ¿En qué casos será indiferente la base? Resuelve  $\text{LOG}(x,2)=8$  y  $\text{LOG}(x,10)=8$  para matizarlo.

26. Resuelve las ecuaciones de los ejercicios 1 y 2 de la página 84 del libro y los ejercicios 6, 7, 8 y 9 de las páginas 85, 86 y 87 del libro. La barra del valor absoluto está en la tecla del 1 en el teclado (AltGr + 1).

27. Resuelve los ejercicios 1 a 6 de la página 88 del libro.








28. Resuelve los ejercicios 13 a 18 de las páginas 89 y 90 del libro.

### 3.4 RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES


Vamos a representar la función  $y=x^2-5x+6$  para observar sus raíces. Para ello, introduce la expresión  $x^2-5x+6$  y resáltala colocando el cursor sobre ella. A continuación, pulsa el icono  para abrir la ventana de gráficos 2D.

Una vez abierta, es necesario volver a pulsar el mismo icono (pero en la ventana 2D-plot) para que se dibuje realmente la gráfica. Cada vez que se pulse el icono se redibuja la función activa en un nuevo color.

Los iconos de la barra de herramientas de la ventana de gráficos 2D permiten centrar la gráfica y hacer *zoom*.

	Dibujar la función activa		Ver mayor intervalo en los ejes = reducir la imagen
	Borrar la última función		Ver mayor intervalo del eje OY = reducir la imagen en vertical
	Centrar la imagen en la posición del cursor-cruz		Volver a la pantalla de álgebra o de expresiones
	Centrar la imagen en el origen de coordenadas		

En la parte inferior izquierda aparecen las coordenadas de la posición del cursor. Sitúa el cursor (aproximadamente) sobre los puntos en que la gráfica corta al eje  $OX$  y anota el valor de la abscisa que aparece abajo. Regresa a la pantalla de expresiones y resuelve la ecuación. Basta resaltar la expresión y pulsar el icono **Resolver** (si se omite “=0” se asume por defecto). Compara las raíces con las abscisas obtenidas.

Representa y estima las raíces de los polinomios que aparecen en el ejercicio 1. No es preciso volver a introducirlos. Sitúa el cursor sobre el primer polinomio y haz *click* para resaltarlo. A continuación, representa la función con . DERIVE asume la función  $y = P(x)$ .

Repite el proceso con el resto de polinomios y después con los del ejercicio 4.

29. Representa y estima las soluciones de las ecuaciones que aparecen en el ejercicio 12. No es preciso volver a introducir las. Sitúa el cursor sobre la primera ecuación para resaltarla, abre la ventana de introducción de datos y pulsa **F3**. Esto copiará la expresión resaltada. Elimina la parte final, =0, y confirma con **Sí**. A continuación, representa la función resultante.

Repite el proceso con el resto de ecuaciones y después con alguna de las que aparecen en los ejercicios 20 a 39.

Es esencial que elabores y desarrolles estrategias de resolución de problemas. Para ello debes practicar. Lee atentamente los enunciados, asigna variables ( $x$ ,  $y$ ...) a las in-

cógnitas que se pretende calcular y plantea las ecuaciones correspondientes. A partir de ahí, puedes utilizar DERIVE para la resolución mecánica de las ecuaciones. Resuelve de esta forma los problemas 33 a 43 que aparecen en las páginas 91 Y 92 del libro.

### 3.5 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES GENERADAS ALEATORIAMENTE

---

La función  $\text{RANDOM}(n)$  genera un número entero entre 0 y  $n$ . Introduce y simplifica la expresión  $\text{RANDOM}(5)x+\text{RANDOM}(5)=0$ . Resuelve la ecuación generada y compruébalo.

Introduce la expresión  $\text{RANDOM}(4)x^2+\text{RANDOM}(8)x-\text{RANDOM}(8)=0$  y pulsa **Sí**.

Mientras la expresión anterior está resaltada, pulsa **Simplificar**. Resuelve tú la ecuación generada y luego comprueba resolviéndola automáticamente. Interpretalo gráficamente representando la parábola generada.

Vuelve a situar el cursor sobre la expresión de  $\text{RANDOM}$  y pulsa otra vez **Simplificar**. Repite la práctica con la nueva ecuación.


Reitera el proceso varias veces previendo en cada caso la existencia y el número de soluciones de la ecuación.


### 3.6 SISTEMAS DE ECUACIONES. INTERPRETACIÓN GRÁFICA

---

Abre el menú **Resolver** de la barra de herramientas. Elige la opción **Sistema de ecuaciones**, especifica 2 ecuaciones e introduce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x+2y-16=0 \\ x-y+3=0 \end{aligned}$$

Haz *click* sobre el campo **Variables** y asegurate de que aparecen las variables (normalmente  $x$ ,  $y$ ). Pulsa **Sí** y, a continuación, *simplifica* con el icono . Obtendrás las soluciones del sistema.

Representa las dos rectas sucesivamente (tienes que despejar  $y$ ) y comprueba que las coordenadas del punto de intersección coinciden con la solución obtenida. Se puede despejar la  $y$  resolviendo con  la ecuación en la variable  $y$ .

También puedes representarlas simultáneamente introduciendo entre corchetes sus expresiones  $[(-3x+16)/2,x+3,0]$ . (El 0 se incluye porque si hay solo dos funciones, DERIVE interpreta una sola función en coordenadas polares).


30. Resuelve e interpreta gráficamente los sistemas:

$$3x-2y-5=0; x+y-8=0$$


$$3x-2y+6=0; 3x-2y-2=0$$

(¿Puedes explicarlo?)

$$x+y=50; 5.4x+6.4y=294$$

Si el sistema no es lineal, debes utilizar  para “despejar” una de las variables de una de las ecuaciones y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. No emplees la opción **Resolver sistemas**.

Resuelve el sistema que aparece en la página 87 del libro:

Para ello, introduce  $2x-y=9$  y pulsa . Si en el apartado **Variable** figura **x**, obtendrás  $x$  en función de  $y$ ; pero si especificas **y** como variable, obtendrás  $y$  en función de  $x$ . Tras pulsar el botón **Simplificar** obtendrás la variable despejada. A continuación, introduce la otra ecuación, pero sustituyendo la variable despejada por la expresión recién obtenida. En este caso deberás introducir  $\sqrt{(x+2x-9)+2x-9}=x$ . Por último, debes resolver esta ecuación. Compara este procedimiento con el “método de sustitución” que te han explicado.

En este ejemplo trivial no merece la pena usar DERIVE para despejar  $y$  de la primera ecuación, pero en otros casos puede ser aconsejable. Prueba a despejar  $y$  de la segunda ecuación.

31. Resuelve el sistema  $2 \text{LOG}(x,10)+\text{LOG}(y,10)=5$  ;  $\text{LOG}(xy,10)=4$  de forma análoga a la del ejemplo anterior. Prueba primero despejando  $x$  de la primera ecuación. Si despejas  $y$ , obtienes una expresión extraña. ¿Sabrías interpretarla?

32. Resuelve e interpreta gráficamente los sistemas:

$$y=x^2-5x+4; 2x+y=8$$



$$y=x^2-4x+4; x+y=1 \quad (\text{¿Puedes explicarlo?})$$

$$y=x^2-x-6; 2x-y-6=0$$

33. Resuelve e interpreta gráficamente los sistemas de ecuaciones que aparecen en la página 79 del libro.

### 3.7 SISTEMAS DE 3 ECUACIONES

---

Introduce la expresión  $[[3x-5y-10z=-15],[2y+5z=4],[3z=-6]]$  sin olvidar corchetes ni comas, y resuélvela con  como en los apartados anteriores. Observa que al pulsar  aparecen tres incógnitas en la ventana de variables. Compara los resultados que obtienes al simplificar con los de la página 80 del libro.

34. Resuelve el sistema  $[[5x-4y+3z=9],[2x+y-2z=5],[4x+3y+4z=7]]$ .



En el sistema del ejercicio anterior lo importante son los coeficientes y no las incógnitas (sería igual denominarlas  $a, b, c$  o  $i, j, k$ ). Introduce la siguiente expresión fijándote en los corchetes y las comas:

$$m:=[[5,-4,3,9],[2,1,-2,5],[4,3,4,7]]$$

Ahora, escribe **ROW\_REDUCE(m)** y simplifica. Compara la última columna con los resultados obtenidos en el ejercicio anterior.

En realidad, DERIVE ha utilizado el método de Gauss, pero hasta el final. Tras eliminar  $x$  de la segunda y tercera ecuación e  $y$  de la tercera, ha seguido utilizando el mismo proceso hacia arriba para eliminar la  $z$  de la segunda y primera ecuación, y por último la  $y$  de la primera ecuación. También ha dividido cada ecuación para que el coeficiente de cada incógnita sea 1. De esta forma, en la última columna aparecen directamente los valores de las incógnitas.

35. Resuelve los sistemas propuestos en las páginas 80 y 81 del libro y comprueba los resueltos.

36. Comprueba el ejercicio 3 de la página 84 del libro y resuelve los ejercicios 23 a 28 de las páginas 90 y 91.

### 3.8 INECUACIONES

---

Introduce la expresión  $3x-6<0$  y resuélvela como en prácticas anteriores. Verás que obtienes como resultado  $[x<2]$  en vez de  $[x=2]$  que se obtendría al resolver  $3x - 6 = 0$ . Se trata de una inecuación.

Introduce y resuelve  $3x-6\leq 0$ . Observa cómo ahora se incluye la solución  $x=2$ .

37. Introduce y resuelve las siguientes inecuaciones:

$$x^2-5x+6<0$$

$$x^2-9>0$$

$$x^3-4x>0$$

$$x^2+9<0 \quad (\text{¿Qué significa?})$$

38. Introduce y resuelve las siguientes inecuaciones:

$$2x+1 < 7$$

$$-2x+1 < 7$$

$$x^2-5x+4 \leq 0$$

$$\sqrt{(x+3)} \geq 5$$

$$3x-9 < 0$$

$$2x+4 \geq 0$$

Para resolver un sistema de inecuaciones, resuelve cada una de ellas por separado. Las soluciones serán las comunes a las dos inecuaciones.

39. Resuelve las inecuaciones que aparecen en la página 83 del libro:

$$x^2-5x+4 \leq 0$$

$$x^2-5x+4 < 0$$

$$x^2-5x+4 \geq 0$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0$$

$$x^2 - 5x + 7 \leq 0$$

$$x^2 - 5x + 7 \geq 0$$

40. Comprueba el ejercicio 10 de la página 87 del libro y resuelve los ejercicios 29, 30, 31 y 32 de la página 91.

41. Introduce la siguiente inecuación:

$$3x - 2y \geq -6$$

Resuélvela especificando la variable  $x$ . Interpreta el resultado ( $x >$  significa “ $x$  a la derecha de”).

Vuelve a resolverla especificando la variable  $y$ . Interpreta el resultado ( $y >$  significa “ $y$  por encima de”).

42. Resuelve las inecuaciones:

$$x + y > 6$$

$$x - y + 1 > 0$$