2

SUCESIONES

2.1 CÁLCULO DE TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN. TÉRMINO GENERAL

Para introducir en DERIVE la sucesión de término general $a_n = 3n - 5$ pulsa , escribe **A(n):=3n-5** y confirma pulsando el botón **Sí** .

Ponemos **A(n)** en vez de A_n para indicar que n es la variable. Usamos **:=** en vez de =, porque se trata de una asignación o definición, y no de una ecuación.

Simplifica sucesivamente las expresiones **A(3)**, **A(98)**, **A(1200)**. Obtendrás los términos correspondientes.

Para ello, pulsa , introduce **A(3)** y confirma con **Sí**. Después, pulsa **=** o **≈** para obtener el valor.

Introduce y simplifica la expresión **VECTOR(A(n),n,10)**. Obtendrás los diez primeros términos de la sucesión. Repítelo con **VECTOR(A(n),n,50,60)**. Obtendrás los términos de la sucesión comprendidos entre A_{50} y A_{60}.

Puedes definir la herramienta **VA(i,j):=VECTOR(A(n),n,i,j)** para hacerlo automáticamente. Compruébalo con **VA(50,60)**.

Define también **VS(n):=VECTOR([i,A(i)],i,1,n)** para obtener los n primeros términos en forma de columna. Prueba con **VS(12)**.

Define **VS2(n,k):=VECTOR([i,A(i)],i,1,n,k)** para incluir un incremento k. Pruébalo con **VS2(100,5)**. Obtendrás a_1, a_6, a_{11}, a_{16}...

Practica

1. Repite la práctica anterior con las siguientes sucesiones:

$a_n = n^2$ $\qquad$ $a_n = 2^n$ $\qquad$ $a_n = (-3)^{(n-1)}$

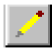
$a_n = 110 - 20*(n-1)$ $\qquad$ $a_n = (-1)^{(n+1)} * n^2$

Solo tienes que redefinir **A(n)** para cada caso. Luego, basta colocar el cursor sobre la expresión anterior de VA(50,60) y pulsar **=** o **≈** para hallar los valores, o sus aproximaciones.

2. Halla los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son los siguientes (ejercicio 2 de la página 62 del libro):

A(n):=3+2/10^n	**A(n):=(n^2-1)/n**	**A(n):=(3n-1)/(n+1)**
A(n):=2^(-n)	**A(n):=n!** (factorial de n)	**A(n):=(n(-1)^n-n)/2**

2.2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

El término general de una **progresión aritmética** de primer término a_1 y diferencia d es $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Para introducirlo en DERIVE, pulsa  y escribe:

A(n):=3+(n-1)*2

En este ejemplo, $a_1 = 3$ y $d = 2$. Compruébalo hallando A(12), A(108), A(1), etc.

Halla los 10 primeros términos con la expresión **VECTOR(A(n),n,1,10)**.

Utiliza la herramienta **VA(i,j)** definida en el apartado 2.1 para obtener VA(1,10), VA(20,25), etc.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética viene dada por :

SA(n):=(A(1)+A(n))/2

Introduce la expresión anterior y halla varias sumas como SA(5), SA(10), etc. Si cambias la definición de A(n), obtendrás valores diferentes.

DERIVE puede obtener la suma de varios valores con la expresión **SUM([a,b,c,...])**.

Introduce y simplifica las expresiones

SUM(VECTOR(A(n),n,1,5))   **SUM(VECTOR(A(n),n,1,10))**

y compara los resultados con los obtenidos anteriormente. Puedes hacerlo automáticamente definiendo la herramienta **SUMA(n):=SUM(VECTOR(A(i),i,1,n))** y aplicándola a SUMA(5) y SUMA(19).

Repite la práctica con otros valores y otras definiciones de A(n). La definición de SUMA(n) se adaptará a la nueva definición de A(n).

Practica

3. Resuelve con DERIVE los ejercicios propuestos en la página 52 del libro.

El término general de una **progresión geométrica** de primer término a_1 y razón r es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Para introducirlo en DERIVE, define **A(n):= 3*2^(n-1).** En este ejemplo,

$a_1 = 3$ y $r = 2$. Compruébalo hallando A(12), A(108), A(1), etc. Halla los 10 primeros términos con la expresión **VA(1,10)**.

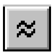
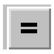
La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por:

SG(n):=(A(1)-A(n+1))/(1-r)

Introduce la expresión anterior y halla varias sumas como SG(5), SG(10), etc. Si cambias la definición de A(n), obtendrás valores diferentes.

Con la herramienta SUMA(n) definida anteriormente halla SUMA(5) y SUMA(10). Compara los resultados con los obtenidos en el ejemplo anterior.

Repite la práctica con otros valores y otras definiciones de A(n).

Introduce la progresión decreciente **A(n):=2*0.1^(n-1)**. Halla algunos conjuntos de términos con las expresiones siguientes: VA(1,10), VA(40,50) y VA(80,90). Utiliza el icono  en vez de  para obtener valores aproximados.

Observa que para n suficientemente grande, los términos decrecen rápidamente.

Halla ahora la suma de los conjuntos de términos del ejemplo anterior con las expresiones siguientes:

SUMA(VECTOR(A(n),n,1,10))

SUM(VECTOR(A(n),n,40,50))

SUM(VECTOR(A(n),n,80,90))

Observa que la suma de los términos alejados es pequeña. Utiliza la herramienta SUMA(k) para obtener la suma de los k primeros términos, automáticamente. Pruébala con SUMA(10), SUMA(50), etc.

Introduce con  la expresión:

VSUMA(k):=VECTOR([n,SUM(VECTOR(A(i),i,1,n))],n,1,k).

Obtendrás la suma de los n primeros términos correspondientes, desde $n = 1$ hasta $n = k$. Compruébala con VSUMA(15).

4. Resuelve con DERIVE los ejercicios 7 y 8 propuestos en la página 53 del libro.

5. Resuelve el ejercicio 7 de la página 62 del libro. Para ello, obtén con DERIVE los primeros términos y obsérvalos.

6. Resuelve con DERIVE el ejercicio 9 de la página 62 del libro. En los apartados a) y b) debes proponer primero el término general.

7. Resuelve los ejercicios 11 y 12 de la página 62 del libro. Propón previamente el término general de cada sucesión.

2.3 SUCESIONES RECURRENTES. SUCESIÓN DE FIBONACCI

Considera una sucesión cuyos términos se obtienen multiplicando por 2 el término anterior. Podríamos construir esta sucesión recurrente con la expresión **s(n):=2*s(n-1)**, pero DERIVE necesita algún valor inicial para comenzar la recurrencia. Supongamos que $a_1 = 1$. La construcción será "si $n = 1$, el valor de a_n es 1; si no, el valor será $2*a_{n-1}$".

En DERIVE debes introducir:

A(n):= IF(n=1, 1, 2*A(n-1))

Observa esta construcción recurrente intentando comprender la expresión y halla algunos términos para comprobarlo.

En este ejemplo puedes observar que el término general se obtiene más fácilmente con la expresión **A(n):=2^n**.

Las expresiones recurrentes ocupan muchos recursos del ordenador y pueden provocar un "desbordamiento de pila", por lo que deben evitarse si es posible. Si el ordenador tarda en responder, pulsa **ESC** para abortar la operación y prueba con otro valor de n menor.

Considera una progresión aritmética que comience con $a_1 = 2$ y cada término se obtenga sumando 1/2 al anterior. Para ello, define **A(n):=IF(n=1,2,A(n-1)+1/2)**. A continuación, simplifica **VS(8)** para observar los 8 primeros términos. Repara en que la definición no recursiva A(n):=2+(n-1)/2 es más eficiente.

Los términos de la **sucesión de Fibonacci** se obtienen sumando los dos términos anteriores. Para comenzar la recurrencia necesitamos dos valores iniciales, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ (podemos considerar $a_0 = 0$). La construcción con DERIVE sería:

FIB(n):=IF(n<2,n,FIB(n-1)+FIB(n-2))

Halla los primeros términos con **VECTOR(FIB(n),n,1,10)**. También podemos utilizar VS(10), pero antes debes introducir **A(n):=FIB(n)**, pues la construcción de VS se hizo para A(n). Hazlo.

Aunque las construcciones recurrentes son ilustrativas, resultan muy lentas y deben evitarse. Una construcción más eficiente se consigue con la definición:

FIBON(n):=ITERATE([k,j+k],[j,k],[0,1],n)

El término 25 de la sucesión de Fibonacci es el segundo número que aparece al simplificar FIBON(25). La construcción se produce por iteración a partir de [0, 1]. El segundo elemento es [1, 0+1], el tercero [1, 1+1], etc. El resultado de cada iteración se utiliza para la siguiente. Puedes redefinir **FIB(n):=FIBON(n) sub 2** .

Practica

8. En el ejercicio 53 de la página 65 del libro se muestra otra forma de definir la sucesión de Fibonacci que resulta mucho más eficiente. Introdúcela así:

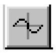
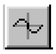
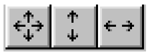
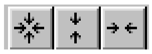
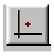
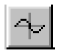
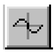
FIB(n):=(((1+√5)/2)^n-((1-√5)/2)^n)/√5

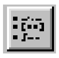
(Esta definición sustituirá la anterior al introducirla).

Compruébala simplificando **FIB(50) y VECTOR(FIB(n),n,1,30)**

9. Define con IF las sucesiones recurrentes de los ejercicios 4 y 5 de la página 62 del libro.

2.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN.

Considera la sucesión $a_n = 3 + n/2$. Introdúcela con **A(n):=3+n/2**. A continuación, introduce y simplifica **VS(12)**. Obtendrás los 12 primeros términos en columna. Mientras el resultado permanece resaltado, pulsa  para acceder a la ventana de gráficos. Una vez en ella, vuelve a pulsar  para representar efectivamente los puntos. Si no aparecen todos los puntos, puedes usar las teclas de *zoom*,  y , para ampliar o disminuir la escala, y  para centrar los ejes en la posición del cursor. Para visualizar mejor los puntos, accede al menú **Opciones** de la barra de herramientas, elige **Puntos** y marca la opción de **Unir Sí**. Confirma con **Sí** y vuelve a pulsar . Si el color no es apropiado, vuelve a pulsar  para redibujar en otro color.

Para eliminar los gráficos, pulsa **CTRL+D**. Para regresar a la ventana de expresiones pulsa .

Introduce, simplifica y representa **VS2(100,10)**. Solo se ha hallado uno de cada 10 términos. Repite con **VS2(1000,50)** y con **VS2(100000,5000)**. De esta forma puedes observar el comportamiento de la sucesión para términos alejados y destacar la tendencia.

Define **A(n):=5(1/2)^n**. Simplifica VS(10) y representa el resultado. Usa **CTRL+D**, si es preciso, para eliminar gráficos precedentes. Haz lo mismo con VS2(500,20).

Practica

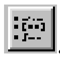
10. Repite las últimas prácticas con las siguientes sucesiones aparecidas en ejercicios anteriores:

$a_n = 3n - 5$	$a_n = 3 + 2(n - 1)$	$a_n = 3 * 2^{(n-1)}$
$a_n = 2 * 0{,}1^{(n-1)}$	$a_n = 2^n$	$a_n = 2 + (n - 1) / 2$

$a_n = n^2$ $\quad\quad$ $a_n = (-3)^{(n-1)}$ $\quad\quad$ $a_n = 110 - 20 * (n - 1)$

$a_n = (-1)^{(n+1)} * n^2$

11. Introduce la expresión **A(n):=4*0.5^n** correspondiente a una progresión geométrica decreciente. Representa con **VS(20)** sus primeros términos y observa cómo decrecen.

Sin eliminar la gráfica anterior, regresa a la ventana de expresiones pulsando . Introduce, simplifica y representa **VSUMA(20)** y observa cómo las sumas tienden a un valor. Trata de predecirlo y compáralo con el resultado de **SGD(4,0.5).**

Introduce la expresión **y=SGD(4,0.5)** y representa el resultado. Obtendrás una recta horizontal a la que se aproximan las sumas.

12. Representa los diez primeros términos de las sucesiones **A(n):= n(n+1)(2n+1)/6** y **A(n):= n^2(n+1)^2/4**.

13. Simplifica la expresión **A(n):=FIB(n)** y representa el resultado de **VS(10)**. Ajusta la escala de la ventana gráfica.

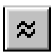
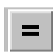
Si la definición de FIB es **FIB(n):=(((1+√5)/2)^n-((1-√5)/2)^n)/√5** (ejercicio 8), puedes considerar valores de *n* superiores en VS(n).

2.5 LIMITE DE SUCESIONES

OBSERVAR LA TENDENCIA CALCULANDO TÉRMINOS

Define la sucesión **A(n):=5n/(n+3)**. A continuación, introduce y simplifica **VA(1,15)** para obtener los 15 primeros términos. ¿Observas la tendencia? ¿A qué límite tiende la sucesión? Para confirmarlo, halla algún término alejado de los primeros como A(50), A(100), A(1000), A(10000), etc. ¿Cuál es la diferencia entre estos términos y el límite, 5? Trata de encontrar algún término a partir del cual la diferencia con 5 sea menor de 0,001; 0,0001; etc.

¿A partir de qué término puedes asegurar que la diferencia entre A(n) y 5 es menor que una millonésima, 10^{-6}?

Prueba con **5-A(2000)**, **5-A(600000)**, etc. Utiliza  en vez de  para obtener el resultado en forma decimal.

Introduce y simplifica la expresión **VECTOR([n,A(n),5-A(n)],n,1,20)**. Verás los 20 primeros términos de la sucesión y su diferencia con el límite 5.

Practica

14. Repite la práctica anterior con las siguientes sucesiones:

A(n):=(4n+10)/(2n-1) $\quad\quad$ **A(n):=3+10/n**

A(n):=(-1)^n/n **A(n):=√(n^2+5n)-n**

A la vista de la tendencia debes prever el límite, L, y sustituirlo en la expresión **VECTOR([n,A(n),L-A(n)],n,1,20)**.

15. Halla los 20 primeros términos de las siguientes sucesiones con VS(20). A la vista de los resultados, estima el valor del límite y prevé los casos en que es infinito o no existe límite. Confírmalo obteniendo algún término alejado. También puedes hacerlo con VA(1000,1020) para considerar los términos a_{1000} hasta a_{1020}:

A(n):=(2n+3)/6 **A(n):=(2n-3)/(n+5)** **A(n):=3-2^n**

A(n):=5-1/n^3 **A(n):=2/(n^2)** **A(n):=((-1)^nn/(n+4)**

A(n):=n(-1)^n **A(n):=(-1)^n 2/(n^2)** **A(n):=(2n^2-1)/(n^2+3)**

A(n):=(n-3)/(n+1) **A(n):=n/(2n+1)** **A(n):=(4-n)^3**

16. Resuelve los ejercicios 13 y 14 de la página 63 del libro y los ejercicios 31, 33 y 34 de las páginas 63 y 64.

OBSERVAR LA TENDENCIA GRÁFICAMENTE

Introduce **A(n):=6n/(2n+1)**. A continuación, introduce **VS(50)**, aproxima el resultado con y represéntalo con . Sitúa el cursor sobre algún término y haz *click*. En la parte inferior izquierda verás las coordenadas (n, a_n) correspondientes. ¿Cuál será el límite? Regresa a la pantalla de expresiones con y observa los valores de $A(n)$ obtenidos con VS(50). Introduce **y=3** y represéntalo también. Observa el acercamiento de los términos al valor del límite.

Representa ahora el resultado de VS2(500,50). Obtendrás términos más alejados.

Practica

17. Repite la práctica anterior con las sucesiones:

A(n):=(4n+10)/(2n-1) **A(n):=n^2/5-4n** **A(n):=n^2/4-2n+3**

que aparecen en la página 55 del libro. Observa como las dos últimas “tienden a infinito”.

18. Repite la práctica con las sucesiones del ejercicio 15.

No es preciso volver a introducir cada $A(n)$. Basta situar el cursor sobre la definición correspondiente, hacer *click* para resaltarla y a continuación pulsar . Desde ese momento, la definición activa de $A(n)$ será la resaltada. Puedes hacer lo mismo con VS(20), que se adaptará a la definición actual de $A(n)$.

19. Resuelve con Derive el ejercicio 32 de la página 64 del libro.

CÁLCULO AUTOMÁTICO DE LÍMITES.

Introduce la sucesión **A(n):=5n/(n+3)**. Vamos a hallar automáticamente su límite. Para ello, introduce y simplifica **LIM(A(n),n,inf)**. También puedes hacerlo con el icono lim . Sitúa el cursor sobre la definición de A(n) para resaltarla, pulsa lim y especifica **n** en el apartado **variable** e **inf** en el apartado **punto**. Si confirmas con **Sí**, aparecerá la expresión del límite que deberás hacer efectivo con = . Si confirmas con **Simplificar**, obtendrás directamente el valor del límite (si existe).

Simplifica VS(30) y representa el resultado para observar la sucesión. Regresa a la pantalla de expresiones, introduce **y=5** y represéntalo también. Observa el acercamiento de los términos al valor del límite.

Practica

20. Halla con lim el límite de las siguientes sucesiones:

A(n):=6n/(2n+1) **A(n):=(4n+10)/(2n-1)**

A(n):=n^2/5-4n **A(n):=n^2/4-2n+3**

Basta situar el cursor sobre la definición correspondiente, hacer *click* para resaltarla y a continuación pulsar lim . Compara el resultado con los ejemplos y ejercicios del subapartado anterior.

21. Halla con lim el límite de las siguientes sucesiones :

A(n):=(-1)^n **A(n):=(-2)^n**

A(n):=(-0.5)^n **A(n):=(-2)^(2n+1)**

Interpreta los resultados y, si es preciso, representa algunos términos con VS(50). ¿Es cierto que las sucesiones "oscilantes" no tienen límite?

22. Halla con lim el límite de las siguientes sucesiones:

A(n):=√(n^2-2n+1)- √(n^2-8n+2) **A(n):=(2n-1)/(3n+5)-(n+3)/(4n)**

A(n):=((5-n)/(2n+1))^(3n-7)

23. Comprueba, hallando los límites y representando términos, los ejercicios 4 y 5 resueltos en la página 61 del libro:

A(n):=(2n^2-1)/(n^2+3) **A(n):=(2+(-1)^(n-1))/n**

A(n):=(1+n(-1)^n)/n

24. Resuelve con DERIVE los ejercicios 35 y 36 de la página 64 del libro.

25. Resuelve con DERIVE el ejercicio 37 de la página 64 del libro y el ejercicio 39 de la página 64. Para ello, introduce las definiciones de A(n) y B(n) y, a continuación, simplifica LIM(A(n),n,inf), LIM(B(n),n,inf), LIM(A(n)+B(n),n,inf), LIM(A(n)B(n),n,inf), etc.

2.6 LÍMITES IMPORTANTES

SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA DECRECIENTE

Introduce la progresión decreciente **A(n):=2*0.1^(n-1)**. En el caso de una progresión geométrica decreciente de primer término a y razón r, podemos hallar la suma de sus infinitos términos con la expresión:

SGD(a,r):=a/(1-r)

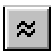
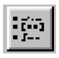
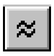
Pruébala con SGD(2,0.1) y compara el resultado con lo que has obtenido en el apartado 2.2. Observa como las sumas se van aproximando al valor de SGD(2,0.1).

Repítelo con otros valores de a y r (pero con $r < 1$).

Practica

26. Considera $a = 3$ y $r = -1/2$ y halla **SDG(3,-1/2)**. Compara el resultado con el de la página 58 del libro.

NÚMERO e

Introduce la sucesión **A(n):=(1+1/n)^n**. Halla algunos términos con VS(20). Aproxima con  . Representa el resultado y trata de prever el límite. Regresa a la ventana de expresiones con  y halla el límite de $A(n)$. Observa que se trata del número e. Aproxímalo con  . Vuelve a aproximarlo con el menú **Simplificar-Aproximar** (o pulsando **CTRL+G**) para poder especificar el número de dígitos (especifica **60**). Puedes introducir el número e con **CTRL+e**. DERIVE mostrará **ê** para diferenciarlo de una posible variable **e**.

Halla términos más alejados con VS2(1000,50).

Practica

27. Algunas sucesiones están relacionadas con el número e aunque no sepas hallar su límite. Hazlo automáticamente con  en las siguientes sucesiones:

A(n):=(1+5/n)^(3n) **A(n):=((n-3)/(n+5))^(n/2)**

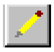
A(n):=((n^2+1)/(n^2+3n))^(2n^2/(n-3))

Halla algunos términos con VS2 y represéntalos para comprobar el límite.

28. Resuelve con DERIVE los ejercicios 36 y 37 de la página 64 del libro.

NÚMERO ÁUREO

Un rectángulo de lados a y b se dice áureo si $a / b = \phi$. Estos rectángulos tienen la propiedad de que si eliminamos un cuadrado (de lado b) el rectángulo resultante (de lados b y $a - b$) es otro rectángulo de oro. Considera por ejemplo un rectángulo de lados 1 y f. Al quitarle un cuadrado de lado 1 resulta un rectángulo de lados $f - 1$ y 1. Se cumplirá, entonces, $f = 1 / (f - 1)$.

Introduce con  la ecuación **f=1/(f-1)**. Con la ecuación resaltada pulsa el icono  (resolver) y asegúrate de que f aparece como variable-incógnita a calcular. Pulsa **Simplificar** y obtendrás los dos valores de f. Si pulsas el icono , conseguirás la aproximación decimal. El valor negativo lo desechamos pues f es una longitud (lado del rectángulo).

Si introduces **ϕ:= (1+ √5)/2**, habrás definido la constante ϕ como el número de oro. El símbolo **ϕ** lo puedes encontrar en la parte superior de la ventana de introducción de expresiones.

Vamos a obtener el número f como límite de algunas sucesiones. Introduce sucesivamente las siguientes expresiones:

a:=(1+√5)/2 **b:=(1-√5)/2**

S(n):=(a^(n+1)-b^(n+1))/(a^n-b^n) **P(n):=(a^(n+1)+b^(n+1))/(a^n+b^n)**

Halla algunos términos como S(5), S(12), S(90), P(5), P(12), P(90). Observa que se van aproximando a ϕ.

Para hallar n términos conjuntamente, define las herramientas siguientes:

VS(n):=VECTOR([i,S(i)],i,1,n) **VP(n):=VECTOR([i,P(i)],i,1,n)**

Simplifica VS(20). Aproxima los valores con . Representa los puntos generados. Utiliza el *zoom* si es preciso.

Simplifica VP(20) y representa el resultado. Introduce **y=ϕ** y represéntalo también. Interpreta el gráfico.

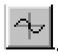
Introduce la siguiente expresión:

AUR(n):=FIB(n+1)/FIB(n)

Utiliza la definición de FIB(n) del ejercicio 8:

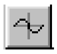
FIB(n):=(((1+√5)/2)^n-((1-√5)/2)^n)/√5

Calcula algunos términos como AUR(5) y AUR(10). Relaciona estos valores con ϕ.

Calcula varios términos con **VECTOR([n,AUR(n)],n,1,15)** y represéntalos con . Representa también **y=ϕ**.

Como el cálculo de FIB(n) es muy lento, no tomes valores de *n* muy elevados. Pulsa **ESC** si es preciso.

Considera la construcción **FIBON(n):=ITERATE([k,j+k],[j,k],[0,1],n)** del apartado 2.3.
Define **AUR2(n):=FIBON(n)sub2/FIBON(n)sub1**.

Calcula algunos términos como AUR2(50) y AUR2(100). Relaciona estos valores con ϕ.
Calcula varios términos con **VECTOR([n,AUR2(n)],n,1,100)**. Para ello, introduce la expresión anterior, confirma con **Sí** y, a continuación, pulsa **CTRL+G** para aproximar el resultado con 15 dígitos. Represéntalo con . Representa también **y=ϕ**.